ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ. σχολ. βιβλ. 251

Α2. Θεωρία σελ. σχολ. βιβλ. 273

Α3. Θεωρία σελ. σχολ. Βιβλ. 150

Α4. Λ, Σ, Σ, Σ, Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1..

$2\left|z^2\right|+\left(z+\bar{z}\right)i-4-2i=0 \quad (1)$

Αν $z=x+yi$ τότε $|z|^2=x^2y^2=z+\bar{z}=2x$

$$(1)\Rightarrow 2\left(x^2+y^2\right)+2xi-4-2i=0\Leftrightarrow x^2+y^2-2+\left(x-1\right)i=0\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2=0 \\ x-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x=1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y^2=1 \\ x=1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm1 \\ x=1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{ ή } \quad \begin{matrix} x=1 \\ y=-1 \end{matrix}$$

Άρα οι λύσεις της (1) είναι οι μιγαδικοί $z_1=1+i$ και $z_2=1-i$

Β2.

Το πηλίκο $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{1+i}{-i\left(1+i\right)}=-\dfrac{1}{i}=i$ τότε

$$W=3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39}=3\left(i\right)^{39}=3i^{4\cdot9+3}=3\left(i^4\right)^9\cdot i^3=3\cdot1\left(-i\right)=-3i$$

Β3.

$|u+w|=|4z_1-z_2-i|$

θέτω $w=-3i$, $z_1=1+i$, $z_2=1-i$ τότε $|u-3i|=\left|4\left(1+i\right)-\left(1-i\right)-i\right|$

$|u-3i|=|4+4i-1+i-i|=|u-3i|=|3+4i|\Rightarrow$

$\Rightarrow|u-3i|=\sqrt{3^2+4^2}\Leftrightarrow|u=3i|=5$ θέτω όπου $u=\alpha+\beta i$ τότε

$|\alpha+\beta i-3i|=5\Leftrightarrow\left|\alpha+\left(\beta-3\right)i\right|^2=5^2\Leftrightarrow\alpha^2+\left(\beta-3\right)^2=25$ (καρτεσιανή εξίσωση κύκλου).

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w κινούνται στο μιγαδικό επίπεδο σε κύκλο με κέντρο το $K\left(0,3\right)$ και ακτίνα $\rho=5$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$h\left(x\right)=x-\ln\left(e^x+1\right),\quad x\in R$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο R ως πράξη παραγωγισίμων.

Άρα $h'(x)=1-\frac{1}{e^x+1}\cdot e^x=\frac{\cancel{e^x}+1-\cancel{e^x}}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}>0$ (οπότε h γνησίως αύξουσα στο R)

$$h''(x)=\left(\frac{1}{1+e^x}\right)'=-\frac{\left(1+e^x\right)'}{\left(1+e^x\right)^2}=-\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}<0$$

Άρα $h''(x)<0,\ \forall x\in R$ οπότε h κοίλη στο R

Γ2.

$e^{h(2h'(x))}<\frac{e}{e+1}\quad(1)$

Παρατηρώ ότι $h(x)=\ln e^x-\ln\left(e^x+1\right)=\ln\frac{e^x}{e^x+1}$

Άρα $h(1)=\ln\frac{e}{e+1}$

Άρα λογαριθμίζω την (1)

$$\ln e^{h(2h'(x))}<\ln\frac{e}{e+1}\Rightarrow h\left(2h'(x)\right)<h(1)\xrightarrow[\text{αύξουσα}]{\text{h γνησίως}}2h'(x)<1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'(x)<\frac{1}{2}\Rightarrow h'(x)<h'(0)\xrightarrow[\to h'\text{ γνησίως φθίνουσα}]{h''<0}x>0$$

Γ3.

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln\left(e^x+1\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln e^x-\ln\left(e^x+1\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{e^x}{e^x+1}\qquad(1)$$

θέτω $u=\frac{e^x}{e^x+1}$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$

Άρα $\xrightarrow{(1)}\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{u\to1}\ln u=0$ οπότε η y=0 (Άξονας x΄x) είναι οριζόντια ασύμπτωτη.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\ln\left(e^x+1\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{\ln\left(e^x+1\right)}{x}\right)\quad(1)$$

Παρατηρώ ότι $\frac{\ln\left(e^x+1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot\ln\left(e^x+1\right)\right]=0\cdot0=0$

άρα το $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=1-0=1$ οπότε $\lambda=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{h(x)}{x}$

$\beta=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(h(x)-\lambda-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\cancel{x}-\ln\left(e^x+1\right)-\cancel{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\ln\left(e^x+1\right)\right)=0$

Άρα $y=x$ πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$

Γ4.

Πρόσημο της Φ(x)

$\phi(x)=0 \to e^x\left(h(x)+\ln 2\right)=0 \xrightarrow{e^x>0}$

$\Rightarrow h(x)+\ln 2=0 \Rightarrow \ln e^x-\ln\left(e^x+1\right)+\ln 2=0 \Leftrightarrow \ln\left(2e^x\right)-\ln\left(e^x+1\right)=0$

$\Rightarrow 2e^x=e^x+1 \Rightarrow e^x=1 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$

$\varphi(x)>0,\ \forall x>0$

Άρα $E(\Omega)=\int_0^1 \varphi(x)dx=\int_0^1 e^x\left(h(x)+\ln 2\right)dx=\int_0^1\left(e^x\right)'\left(h(x)+\ln 2\right)dx$

$=\left[e^x\left(h(x)+\ln 2\right)\right]'-\int_0^1 e^x\cdot h'(x)dx=\left[e^x\left(h(x)+\ln 2\right)\right]_0^1-\int_0^1 e^x\cdot\dfrac{1}{e^x+1}dx$

$=\left[e^x\left(h(x)+\ln 2\right)\right]_0^1-\left(\ln\left(e^x+1\right)\right)_0^1=$

$e^1\left(h(1)+\ln 2\right)-\left[e^0\left(h(0)+\ln 2\right)\right]-\left(\ln(e+1)-\ln 2\right)$

$=e\left(1-\ln(e+1)+\ln 2\right)-\cancel{\left(-\ln 2+\ln 2\right)}-\left(\ln(e+1)-\ln 2\right)$

$=e-e\ln(e+1)+e\ln 2-\ln(e+1)+\ln 2$

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

Δ1. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1}=e^0=1=f(0)$

$f'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)'=\dfrac{\left(e^x-1\right)'\cdot x-\left(e^x-1\right)\cdot(x)'}{x^2}=\dfrac{e^x\cdot x-e^x+1}{x^2}\ (1)$

Θεωρώ $h(x)=xe^x-e^x+1$

$h'(x)=e^x+xe^x-e^x=xe^x \Leftrightarrow h'(x)=0,\ x=0$

Στο σημείο $x=0$ η h δέχεται ολικό ελάχιστο το $h(0)=0$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	O.E.	$\nearrow$

$h(x)\geq h(0)\Rightarrow h(x)\geq 0$

Οπότε $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}\geq 0$

Άρα η f γνησίως αύξουσα στο R

Δ2. α) f γνησίως αύξουσα στο R

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-1}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$,

$f(A)=(0,+\infty),\ f(x)>0$

Εάν $\left.\begin{matrix} 1<2f'(x) \\ f(x)>0 \end{matrix}\right\} \int_1^{2f'(x)} f(u)du>0$ Άτοπο

$\left.\begin{matrix} 1>2f'(x) \\ f(x)>0 \end{matrix}\right\} \int_1^{2f'(x)} f(u)du<0$ Άτοπο

Άρα $f'(x)=\frac{1}{2}$, $f'(x)=f'(0)\xrightarrow[\substack{f\ \text{γν.αύξουσα} \\ f'\ 1-1}]{f\ \text{κυρτή}}\boxed{x=0}$

Αποδεικνύω ότι $f'(0)=\frac{1}{2}$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$$

β) Ισχύει $x'(t)=2y'(t)$ (1) όπου $x'_{(t)}$ και $y'_{(t)}$ ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης και της τεταγμένης αντίστοιχα του σημείου $M\left(x_{(t)},\ y_{(t)}\right)$ για $t\geq 0$.

Τότε από

$$y=f(x)\Leftrightarrow y_{(t)}=f\left(x_{(t)}\right)\Leftrightarrow y'_{(t)}=f'\left(x_{(t)}\right)\cdot x'_{(t)}\xrightarrow{(1)}\frac{1}{2}x_{(t)}=f'\left(x_{(t)}\right)\cdot x'_{(t)}\Leftrightarrow$$

$$x'_{(t)}\cdot\left(f'\left(x_{(t)}\right)-\frac{1}{2}\right)=0\overset{x'_{(t)}>0}{\Leftrightarrow}f'(x_t)=\frac{1}{2}\quad(2)$$

Αλλά $f'(x)=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$ τότε $f'\left(x_{(t)}\right)=\frac{x_{(t)}e^{x_{(t)}}-e^{x_{(t)}}+1}{x_{(t)}{}^2}$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow}\frac{1}{2}=\frac{x_{(t)}e^{x(t)}-e^{x(t)}+1}{x_{(t)}{}^2}\Leftrightarrow x_{(t)}{}^2=2x_{(t)}e^{x(t)}-e^{x(t)}+1$$

$$x_{(t)}{}^2-2e^{x(t)}x_{(t)}+e^{x(t)}-1=0\quad(3)$$

Μια προφανής ρίζα της (3) είναι η $x_{(t)}=0$. Αλλά $x_{(t)}e^{x(t)}-e^{x(t)}+1>0$

Άρα η (3) έχει μοναδική λύση την $x_{(t)}=0$ τότε $y_{(t)}=f_{\left(x_{(t)}\right)}=1$

Δ3.

$$g(x)=\left(xf(x)+1-e\right)^2(x-2)^2=\left[\cancel{x}\cdot\frac{e^x-1}{\cancel{x}}+1-e\right]^2(x-2)^2=$$

$$=\left(e^x-\cancel{1}+\cancel{1}-e\right)^2\cdot(x-2)^2=\left(e^x-e\right)^2\cdot(x-2)^2=$$

$$=g'(x)=2\left(e^x-e\right)\cdot\left(e^x-e\right)'\cdot(x-2)^2+\left(e^x-e\right)^2\cdot 2(x-2)$$

$= 2\left(e^x - e\right)\cdot\left(e^x - 0\right)\cdot\left(x-2\right)^2 + \left(e^x - e\right)^2\cdot 2\left(x-2\right) = 2\left(e^x - e\right)\cdot\left(x-2\right)\ \left[e^x\left(x-2\right)+\left(e^x - e\right)\right]$

$= 2\left(e^x - e\right)\cdot\left(x-2\right)\cdot\left(e^x\cdot x - 2e^x + e^x - e\right) = 2\left(e^x - e\right)\cdot\left(x-2\right)\cdot\left(e^x\cdot x - e^x - e\right)$

$$e^x = e \Leftrightarrow x = 1$$
$$g'(x) = 0 \rightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$
$$x\cdot e^x - e^x - e = 0$$

Θεωρώ $A(x) = e^x x - e^x - e$

Bolzano στο $[1,2]$

A συνεχής στο [1,2]

$$\left.\begin{aligned} &A(1) = -e < 0 \\ &A(2) = 2e^2 - e^2 - e = e^2 - e > 0 \end{aligned}\right\}\left(A(1)\right)\cdot\left(A(2)\right) < 0$$

Άρα υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2)

$A'(x) = xe^x > 0$ Άρα A(x) γνησίως αύξουσα

Άρα $x = x_0$ μοναδική ρίζα

x	$-\infty$		1		x_0		2		$+\infty$
$g'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	
			Τ.Ε.		Τ.Μ.		Τ.Ε.		