

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών σελ. σχολ. βιβλ. 194

**A2.** Θεωρία σελ. σχολ. βιβλ. 188

**A3.** Θεωρία σελ. σχολ. Βιβλ. 259

**A4.** Λ, Σ, Λ, Σ, Σ

**ΘΕΜΑ Β**
**B1.**

$$|z-4|=2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2 = (2|z-1|)^2 \Leftrightarrow (z-4)(\bar{z}-4) = 4(z-1)(\bar{z}-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 16 = 4z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 4 \Leftrightarrow 3z\bar{z} = 12 \Leftrightarrow z\bar{z} = 4 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των  $z$  είναι κύκλος κέντρου  $O(0,0)$  και ακτίνας  $\rho = 2$  με καρτεσιανή εξίσωση  $x^2 + y^2 = 4$

**B2.**

**α)**  $w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}$ , από B1 ισχύει  $|z|^2 = 4 \Leftrightarrow z\bar{z} = 4 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{4}{z}$

Αρκεί να δείξουμε ότι  $\bar{w} = w$

$$\bar{w} = \overline{\left( \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \right)} = \frac{\bar{2z_1}}{\bar{z_2}} + \frac{\bar{2z_2}}{\bar{z_1}} = \frac{2\frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}} + \frac{2\frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}} = \frac{8z_2}{4z_1} + \frac{8z_1}{4z_2} = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = w$$

**β)** Αρκεί να δείξουμε ότι  $|w| \leq 4$

$$|w| = \left| \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \right| \leq \left| \frac{2z_1}{z_2} \right| + \left| \frac{2z_2}{z_1} \right| = 2 \left| \frac{z_1}{z_2} \right| + 2 \left| \frac{z_2}{z_1} \right| = 2 \frac{|z_1|}{|z_2|} + 2 \frac{|z_2|}{|z_1|} = 2 \frac{4}{4} + 2 \frac{4}{4} = 4$$

Διότι τα  $z_1, z_2$  επειδή ανήκουν στον κύκλο  $x^2 + y^2 = 4$

Άρα  $|z_1| = 4$  και  $|z_2| = 4$ . Τότε  $|w| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq w \leq 4$

**B3.**

$W = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}$  και  $W = -4$  τότε

$$\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = -4 \Leftrightarrow \frac{2z_1^2 + 2z_2^2}{z_1z_2} = -4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(z_1^2 + z_2^2) = -4z_1z_2 \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(z_1 + z_2)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{z_1 + z_2 = 0}.$$

Έστω  $(AB) = |z_2 - z_1| = |z_2 - (-z_2)| = |2z_2| = 2|z_2|$

$$(AG) = |z_3 - z_1| = |2iz_2 - z_1| = |z_1| |2i - 1| = \sqrt{5}|z_1|$$

$$(BG) = |z_3 - z_2| = |2iz_1 - (-z_1)| = |2iz_1 + z_1| = |z_1| |2i - 1| = \sqrt{5}|z_1|$$

Επειδή  $(AG) = (BG) = \sqrt{5}|z_1|$  το τρίγωνο  $ABG$  είναι ισοσκελές με κορυφή το  $G$ .

**ΘΕΜΑ Γ**

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

**Γ1.**

$$D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{(e^x)'(x^2 + 1) - e^x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2 + 1)^2} \geq 0 \quad (\text{το « = » ισχύει για } x = 1).$$

Άρα η  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

$$f(A) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty) \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + 1} \cdot e^x = 0$$

$$\left( \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

**Γ2.**

$$f(e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)) = \frac{e^2}{5} \Leftrightarrow f(e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)) = f(2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{3-x} \cdot (x^2 + 1) = 2 \Leftrightarrow \frac{e^3}{e^x} \cdot (x^2 + 1) = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{e^x} = \frac{2}{e^3} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^3}{2}$$

Παρατηρώ ότι το  $\frac{e^3}{2} \in f(A) = (0, +\infty)$

Άρα υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα  $x_0 \in \mathbb{R}$  και επειδή η  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  η ρίζα είναι μοναδική.

**Γ3.**

1<sup>ος</sup> τρόπος

Για  $x > 0$

$$t \leq 4x \Rightarrow f(t) \leq f(4x) \quad (\text{το « = » ισχύει παντού})$$

$$\Rightarrow \int_{2x}^{4x} f(t) dt < \int_{2x}^{4x} f(4x) dt \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t) dt < f(4x)(4x - 2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t) dt < 2x \cdot f(4x).$$

2<sup>ος</sup> τρόπος

$$\text{Θεωρώ } F(x) = \int_a^x f(t) dx, \quad a \in (0, +\infty), \quad (F'(x) = f(x))$$

$$\text{Η ανίσωση γράφεται } \int_{2x}^a f(t) dx + \int_a^{4x} f(t) dx < 2x f(4x) \Leftrightarrow \int_a^{4x} f(t) dx - \int_a^{2x} f(t) dx < 2x f(4x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{F(4x) - F(2x)}{2x} < f(4x) \quad (1)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής για τη  $F$  στο  $[2x, 4x]$

- F συνεχής στο  $[2x, 4x]$
- F παραγωγίσιμη στο  $(2x, 4x)$

$$\text{Υπάρχει } \xi \in (2x, 4x) : F'(\xi) = \frac{F(4x) - F(2x)}{2x} \quad (2)$$

Από την (1), (2)  $\rightarrow F'(\xi) < f(4x) \Leftrightarrow f(\xi) < f(4x) \xrightarrow{f \uparrow} \xi < 4x$  ισχύει.

#### Γ4.

Συνέχεια στο  $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_{2x}^{4x} f(t) dt}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4f(4x) - 2f(2x)}{1} = 2f(0) = 2 \cdot 1 = 2$$

$g(0) = 2$ , άρα  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$ , άρα η g συνεχής στο  $x_0 = 2$

Για κάθε  $x > 0$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\left(\int_{2x}^{4x} f(t) dt\right)' \cdot x - \int_{2x}^{4x} f(t) dt \cdot (x)'}{x^2} = \frac{(4f(4x) - 2f(2x)) \cdot x - \int_{2x}^{4x} f(t) dt}{x^2} = \\ &= \frac{4x \cdot f(4x) - 2x \cdot f(2x) - \int_{2x}^{4x} f(t) dt}{x^2} = \frac{2xf(4x) + 2xf(4x) - 2xf(2x) - \int_{2x}^{4x} f(t) dt}{x^2} = \\ &= \frac{2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t) dt + 2x(f(4x) - f(2x))}{x^2} \end{aligned}$$

- $2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t) dt > 0$  (ερώτημα Γ3)
- $2x > 0$
- $f(4x) > f(2x)$  διότι f γνησίως αύξουσα

Άρα  $2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t) dt + 2x(f(4x) - f(2x)) > 0$ ,

Οπότε  $g'(x) > 0$  άρα g γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$

#### ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.**  $f'(x)(e^{f(x)} + e^{-f(x)}) = 2, f(0) = 0$

$$f'(x)(e^{f(x)} + e^{-f(x)}) = 2 \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} + f'(x)e^{-f(x)} = 2 \Leftrightarrow (e^{f(x)})' - (e^{-f(x)})' = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c$$

Για  $x = 0 \rightarrow e^{f(0)} - e^{-f(0)} = c \Leftrightarrow e^0 - e^0 = c \Leftrightarrow c = 0$  Άρα  $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x$

Θέτω  $g(x) = e^{f(x)} > 0$

$$\Leftrightarrow g(x) - \frac{1}{g(x)} = 2x \Leftrightarrow g^2(x) - 2xg(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g^2(x) - 2xg(x) + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow (g(x) - x)^2 = x^2 + 1 > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} g(x) - x \neq 0 \\ g(x) - x \text{ συνεχής} \\ g(0) - 0 = g(0) = e^{f(0)} = 1 > 0 \end{array} \right\} g(x) - x > 0$$

$$\Rightarrow g(x) - x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow g(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\Delta 2. \alpha) f'(x) = \left[ \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0 \quad (f \text{ γν. αύξουσα στο } \mathbb{R})$$

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot (-x)}{x^2 + 1} = \frac{-x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$	↖		↘

Σ.Κ.

$C_f$  στο  $(-\infty, 0]$  στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, δηλαδή η  $C_f$  κυρτή

$C_f$  στο  $[0, +\infty)$  στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, δηλαδή η  $C_f$  κοίλη

Η  $f$  εμφανίζει Σημείο Καμπής στο  $x = 0$  με τιμή  $f(0) = 0$

β) Βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $(0, f(0))$

$$\text{Για } x = 0 \rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } (\varepsilon) : y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 0 = 1 \cdot x \Leftrightarrow y = x$$

Για κάθε  $x \in [0, 1]$  :  $C_f$  κοίλη, άρα  $f(x) \leq x \Leftrightarrow f(x) - x \leq 0$

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= -\int_0^1 [f(x) - x] dx = -\int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 x dx = -\int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx + \int_0^1 x dx = \\ &= -\left[ x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]' + \int_0^1 x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx + \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = -(\ln(1 + \sqrt{2}) - 0) + \left[ \sqrt{x^2 + 1} \right]_0^1 + \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \\ &= -\ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1 + \frac{1}{2} = \sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**Δ3.**

$f$  γνησίως αύξουσα άρα  $x > 0 \rightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \left( e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) \cdot \ln |f(x)| \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \left( e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) \cdot \ln f(x) \right] \stackrel{0(-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} 0}{\ln f(x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} \cdot f^2(x)}{f'(x)} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ e^{\int_0^x f^2(t) dt} \cdot \frac{f(x)}{f'(x)} \cdot [f(x) \ln f(x)]^2 \right] \quad (1)$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\int_0^x f^2(t) dt} = e^0 = 1$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{f(0)}{f'(0)} = \frac{0}{1} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) \cdot \ln f(x)) \stackrel{f(x)=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{-\frac{1}{u^2}} = \lim_{u \rightarrow 0} \left( -\frac{u^2}{u} \right) = - \lim_{u \rightarrow 0} u = 0$

Άρα το όριο είναι  $= 1 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

**Δ4.**

$$\frac{1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt}{x-3} + \frac{8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt}{x-2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2) \cdot \left( 1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt \right) + (x-3) \cdot \left( 8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt \right) = 0$$

Θεωρώ

$$\varphi(x) = (x-2) \left( 1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt \right) + (x-3) \left( 8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt \right)$$

- $\varphi$  συνεχής στο  $[2,3]$  ως πράξεις συνεχών
- $\varphi(2) = -8 + 3 \int_0^2 f^2(t) dt$
- $\varphi(3) = 1 - 3 \int_0^1 f(t^2) dt$

Ισχύει για κάθε  $x \in (2,3)$  ( $C_f$  κοίλη)

$$0 < f(t) \leq t \Rightarrow f^2(t) \leq t^2$$

$$\int_0^2 f^2(t) dt < \int_0^2 t^2 dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f^2(t) dt < \frac{8}{3} \Rightarrow 3 \int_0^2 f^2(t) dt < 8 \Rightarrow 3 \int_0^2 f^2(t) dt - 8 < 0 \Rightarrow \varphi(2) < 0$$

$$f(t) \leq t \Rightarrow f(t^2) \leq t^2 \Rightarrow \int_0^1 f(t^2) dt < \int_0^1 t^2 dt \Rightarrow \int_0^1 f(t^2) dt < \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(t^2) dt < \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 f(t^2) dt - 1 < 0 \Rightarrow 1 - 3 \int_0^1 f(t^2) dt > 0 \Rightarrow \varphi(3) > 0$$

Άρα για την  $\Phi(x)$  πληρούνται οι προϋποθέσεις θεωρήματος Bolzano

**Οι παραπάνω απαντήσεις είναι ενδεικτικές**