ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ ΜΠΟΝΙΑ
ΒΟΡΕΙΟΥ ΕΛΛΑΔΟΣ

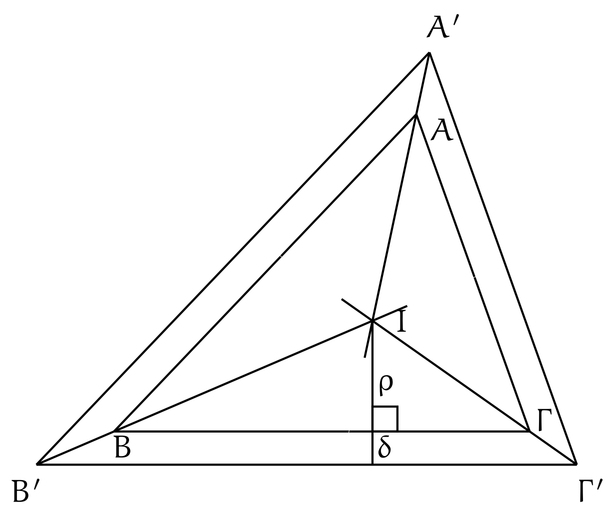
Λύσεις Θεμάτων Μαθηματικών διαγωνισμού ΑΣΕΠ 2007

Ελένη Μήτσιου

Ερώτημα 1

α) Θεωρία από σχολικό βιβλίο κατεύθυνσης Γ′ Λυκείου.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ είναι ομοιόθετα. Οι διχοτόμοι των τριγώνων είναι συνευθειακές.



Αν ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου τότε η ακτίνα ρ' του εγγεγραμμένου στο $A'B'\Gamma'$ είναι $\rho' = \rho + \delta$ και

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{\rho}{\rho+\delta},$$

όπου α, β, γ οι πλευρές του $AB\Gamma$ και Π η περίμετρός του, ενώ α', β', γ' οι πλευρές του $A'B'\Gamma'$ και Π' η περίμετρός του. Αν τ η ημιπερίμετρος τότε $\rho = E/\tau$, οπότε $\rho = 2E/\Pi$, και

$$\lambda = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\rho+\delta}{\rho} = 1 + \frac{\delta}{\rho}$$

Άρα

$$\frac{\Pi'}{\Pi} = 1 + \frac{\delta}{\rho} = 1 + \frac{\delta\Pi}{2E}$$

- $$\Pi' = \left(1 + \frac{\delta\Pi}{2E}\right)\Pi$$

και

$$\frac{E'}{E} = \lambda^2 = \left(1 + \frac{\delta\Pi}{2E}\right)^2$$

- $$E' = \left(1 + \frac{\delta\Pi}{2E}\right)^2 E$$

γ) $f'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

i) Εφαρμογή σχολικού βιβλίου κατεύθυνσης Γ′ Λυκείου.

ii) Έχουμε:

$$\begin{aligned} 2xh(x) &= (x^2+1)[h(x) - h'(x)] + 1, \qquad h(0) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2+1)'h(x) + (x^2+1)h'(x) = (x^2+1)h(x) + 1 \\ &\Leftrightarrow [(x^2+1)h(x) + 1]' = (x^2+1)h(x) + 1. \end{aligned}$$

Για $f(x) = (x^2+1)h(x) + 1$, έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = ce^x \\ f(0) = h(0) + 1 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c = 1,$$

Άρα

$$\begin{aligned} f(x) = e^x &\Leftrightarrow (x^2+1)h(x) + 1 = e^x \\ &\Leftrightarrow h(x) = \frac{e^x - 1}{x^2+1}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ερώτημα 2

α) Θεώρημα Fermat από σχολικό βιβλίο κατεύθυνσης Γ′ Λυκείου.

β)

K	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	25	110	2750	625
2	30	120	3600	900
3	35	120	4200	1225
4	40	130	5200	1600
5	45	130	5850	2025
6	50	140	7000	2500
7	55	150	8250	3025
8	60	140	8400	3600
9	65	150	9750	4225
10	70	170	11900	4900
Σύνολα	475	1360	66900	24625

i) Είναι:

$$\hat{\beta} = \frac{10 \cdot 66900 - 475 \cdot 1360}{10 \cdot 24625 - (475)^2} = 1.115$$
$$\overline{x} = 47.5 \qquad \overline{y} = 136$$
$$\hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\overline{x} = 136 - 1.115 \cdot 47.5 = 83.03$$
$$\hat{y} = 83.03 + 1.115x$$

ii) $\hat{y} = 83.03 + 1.115 \cdot 80 = 172.23\,\text{mm Hg}$.
Σημείωση: Η τιμή 80 είναι αρκετά έξω από το διάστημα $[25, 70]$ οπότε η εικασία μας 172.23 mm Hg δεν είναι και τόσο έγκυρη.

γ) $AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & k \\ -k & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 2x + ky = \lambda x \\ -kx + y = \lambda y \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} (2-\lambda)x + ky = 0 \\ -kx + (1-\lambda)y = 0 \end{matrix}$$

$D = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & k \\ -k & (1-\lambda) \end{vmatrix}$ Αν $D \neq 0$ το ομογενές σύστημα έχει τη μηδενική λύση και απορρίπτεται. Άρα:

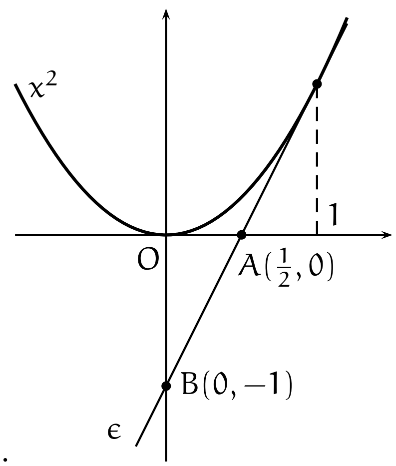
$$D = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 + k^2 = 0$$
$$\lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \geqslant 0 \Leftrightarrow 9 - 4(2 + k^2) \geqslant 0 \Leftrightarrow 4k^2 \leqslant 1$$
$$\Leftrightarrow |2k| \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant 2k \leqslant 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}$$

και k ακέραιος άρα $k = 0$.

Ερώτημα 3
1

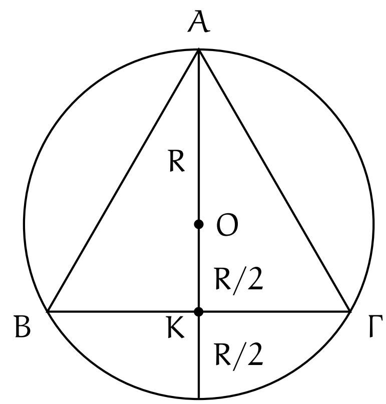
Έχουμε:

$$\begin{aligned} &f(x)=x^2 \quad \text{και} \quad f'(x)=2x\\ &\quad \epsilon\colon y-f(1)=f'(1)(x-1)\\ &\quad \epsilon\colon y-1=2(x-1)\\ &\quad \epsilon\colon y=2x-1\\ &\quad E=\int_0^1 [x^2-(2x-1)]\,dx-(OAB)\\ &\qquad =\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_0^1-\frac{1}{2}(OA)(OB)\\ &\qquad =\frac{1}{3}-1+1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}\ \text{τ.μ.} \end{aligned}$$



Σωστή η $\boxed{\text{γ.}}$
2 Είναι:

$$\begin{aligned} &B\Gamma=\lambda_3=\sqrt{3}R\\ &AK=\frac{3}{2}R\\ &\frac{V_K}{V_T}=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{1}{3}\pi\rho^2 \upsilon}=\frac{4\pi R^3}{\pi(K\Gamma)^2\cdot AK}=\frac{4\pi R^3}{\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2\frac{3R}{2}}\\ &\qquad=\frac{4\pi R^3}{\pi\frac{3}{4}R^2\frac{3}{2}R}=\frac{4\pi}{\frac{9\pi}{8}}=\frac{32}{9}. \end{aligned}$$



Σωστή η $\boxed{\beta.}$
3

$$\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}\left(\frac{1}{x}\right)^{12-k}\left(\sqrt{x}\right)^k$$

Άρα

$$12-k=\frac{k}{2}\Leftrightarrow 3k=24\Leftrightarrow k=8.$$

Συντελεστής $\binom{12}{8}=\frac{12!}{8!\,4!}=495$. Σωστή η $\boxed{\text{γ.}}$

4 Έχουμε:

$$\begin{aligned} k &= \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7} \\ &= \frac{2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cdot 2\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cdot 2\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}\cdot 2\sin\frac{4\pi}{7}\cdot 2\sin\frac{8\pi}{7}} \\ &= \frac{\cancel{\sin\frac{4\pi}{7}}\cdot\cancel{\sin\frac{8\pi}{7}}\cdot\sin\frac{16\pi}{7}}{8\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\cancel{\sin\frac{4\pi}{7}}\cdot\cancel{\sin\frac{8\pi}{7}}} \\ &= \frac{1}{8}\cdot\frac{\sin\left(2\pi+\frac{2\pi}{7}\right)}{\sin\frac{2\pi}{7}} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Σωστή η $\boxed{\alpha.}$

5 Επειδή:

$$\int \ln x\,dx = \int (x)'\ln x\,dx = x\ln x - \int \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}\,dx = x\ln x - x + c,$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx &= -\int_{1/e}^{1}\ln x\,dx + \int_{1}^{e}\ln x\,dx \\ &= -[x\ln x - x]_{1/e}^{1} + [x\ln x - x]_1^e \\ &= -(0-1) + \left[\frac{1}{e}(-1) - \frac{1}{e}\right] + e\cdot 1 - e - (0-1) \\ &= 2 - \frac{2}{e} + 1 = 2 - \frac{2}{e} = 2\left(1-\frac{1}{e}\right). \end{aligned}$$

Σωστή η $\boxed{\delta.}$

6 Έστω $|\vec{\alpha}| = \left|\vec{\beta}\right| = k$. Τότε:

$$\begin{aligned} \vec{x}\cdot\vec{y} = 0 &\Leftrightarrow (\vec{\alpha}+2\vec{\beta})(5\vec{\alpha}-4\vec{\beta}) = 0 \\ &\Leftrightarrow 5\vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 10\vec{\alpha}\vec{\beta} - 8\vec{\beta}^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow -3k^2 + 6\vec{\alpha}\vec{\beta} = 0 \\ &\Leftrightarrow -3k^2 + 6\cdot k\cdot k\cdot\cos(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Άρα $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60°$. Σωστή η $\boxed{\gamma.}$
Ερώτημα 4
7 Το πρώτο ψηφίο του τελευταίου διψήφιου επιλέγεται με 10 τρόπους και το δεύτερο με 9 (αφού τα θέλουμε διαφορετικά). Άρα οι δυνατές περιπτώσεις είναι $N_\Delta = 90$, ενώ υπάρχει μία μόνο ευνοϊκή περίπτωση, $N_E = 1$. Συνεπώς, η πιθανότητα είναι

$$p = \frac{N_E}{N_\Delta} = \frac{1}{90}.$$

Σωστή η $\boxed{\beta.}$
8 Πρέπει $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lambda$. Είναι:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot 4} \\ &= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Άρα $\lambda = 1/2$. Σωστή η $\boxed{\gamma.}$
9 $y = \log_3 \sqrt{81 \cdot \sqrt[3]{27}} = \log_3 \sqrt{81 \cdot 3} = \log_3 3^{5/2} = 5/2$. Σωστή η $\boxed{\beta.}$
10

$$f(x) = (x^2 + x + 5)\phi(x) \qquad \phi(0) = 1, \qquad f(0) = 5$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x^2+x+5)\phi(x) - 5}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2+x}{x} + \frac{5(\phi(x)-1)}{x}\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \left(x + 1 + 5 \cdot \frac{\phi(x)-1}{x}\right) \\ &= 1 + 5 \cdot 1 = 6.\end{aligned}$$

Σωστή η $\boxed{\gamma.}$

11

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 5x + 6, \qquad P_1(3,0) \qquad P_2(5,6) \\ \lambda_{\varepsilon\varphi} &= \frac{6-0}{5-3} = 3 \qquad f(x) = x^2 - 5x + 6 \\ f'(x) &= 2x - 5, \qquad f'(x_0) = \lambda_{\varepsilon\varphi} = 3 \Leftrightarrow 2x_0 - 5 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 4 \\ y - f(4) &= f'(4)(x-4), \qquad f(4) = 2 \\ y - 2 &= 3(x-4) \Leftrightarrow y = 3x - 10 \end{aligned}$$

Σημείωση: Αν $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και A, B σημεία της, με τετμημένες x_1 και x_2 αντίστοιχα, τότε η εφαπτομένη στο $x_0 = (x_1 + x_2)/2$ είναι παράλληλη στη χορδή AB. Σωστή η $\boxed{\text{α.}}$

12 Έχουμε:

$$E_{T_1} = \alpha^2 \qquad E_{T_2} = \frac{1}{2}\alpha^2, \text{διότι έχει κορυφές τα μέσα του πρώτου.}$$

$$E_{K_1} = \pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \pi\frac{\alpha^2}{4} = \frac{\pi}{4}\alpha^2.$$

Όμοια $E_{K_2} = \dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{1}{2}\alpha^2\right)$. Άρα:

$$\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} E_{T_\nu}}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} E_{K_\nu}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) \cdot \alpha^2}{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) \cdot \frac{\pi}{4}\alpha^2} = \frac{4}{\pi}.$$

Σωστή η $\boxed{\text{β.}}$