

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄) 2010**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x)=F(x)+c, \quad c \in \mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x)=F(x)+c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 6

A2. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ ;

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών $a+βi$ και $\gamma+δi$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

β) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ .

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) ,

$$\text{όπου } A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$$

δ) $(\sin x)' = \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{2}{z} = 2$ όπου $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$

B1. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης.

Μονάδες 7

B2. Να αποδείξετε ότι

$$z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$$

Μονάδες 6

B3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει

$$|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2|$$

τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 7

B4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **B3**, να αποδείξετε ότι $3 \leq |w| \leq 7$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .

Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[\frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right]$$

Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα $\psi\psi$.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-1}^1 xf(x)dx$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) \neq x$$

$$f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) - x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (f(x))^2 - 2xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$, είναι σταθερή.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 7

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

ΛΥΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ Α

A1 σελ. 304

A2 σελ. 279

A3 σελ. 273

A4 α) Σ

β) Σ

γ) Λ

δ) Λ

ε) Σ

ΛΥΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ Β

B1.

$$z + \frac{z}{z} = 2 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$$

$$\Delta = 4 - 8 = -4$$

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm i\sqrt{4}}{2} = 1 \pm i \rightarrow \begin{matrix} \rightarrow 1 + i \\ \rightarrow 1 - i \end{matrix}$$

B2. $(1+i)^{2010} + (1-i)^{2010} = [(1+i)^2]^{1005} + [(1-i)^2]^{1005} =$

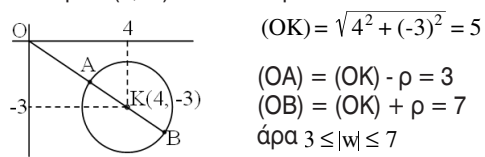
$$(2i)^{1005} + (-2i)^{1005} = (2i)^{1005} - (2i)^{1005} = 0$$

B3.

$$|w - 4 + 3i| = |1 + i - 1 + i| = |2i| = 2$$

Κύκλος με κέντρο Κ(4, -3) και ακτίνα ρ=2.

B4.



ΛΥΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ Γ

Γ1. $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1), x \in \mathbb{R}$

f συνεχής

$$f'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{2 \cdot (x^2 + x + 1)}{x^2 + 1}$$

Το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ έχει $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ και $x^2 + 1 > 0$ άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Επομένως η f γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Γ2.

$$2(x^2 - 3x + 2) = \ln\left[\frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1}\right] \Leftrightarrow 2x^2 + 2(-3x + 2) =$$

$$= \ln[(3x - 2)^2 + 1] - \ln(x^4 + 1) \Leftrightarrow 2x^2 + \ln(x^4 + 1) =$$

$$= 2(3x - 2) + \ln[(3x - 2)^2 + 1] \Leftrightarrow f(x^2) = f(3x - 2)$$

Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη άρα είναι 1-1 επομένως

$$x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$$

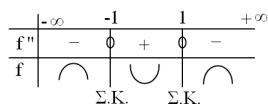
$$x_2 = 1$$

ΛΥΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ Γ

Γ3. Η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη για $x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$



Άρα τα σημεία καμπής είναι $(-1, f(-1)) = (-1, -2 + \ln 2)$

$$(1, f(1)) = (1, 2 + \ln 2)$$

$$f'(-1) = 1 \text{ και } f'(1) = 3$$

εφαπτομένες:

$$(\epsilon_1): y + 2 - \ln 2 = x + 1 \Leftrightarrow y = x - 1 + \ln 2$$

$$(\epsilon_2): y - 2 - \ln 2 = 3(x - 1) \Leftrightarrow y = 3x - 1 + \ln 2$$

Για $x=0$ η (ϵ_1) τέμνει τον $\psi\psi$ στο $(0, \ln 2 - 1)$ και

η (ϵ_2) τέμνει τον $\psi\psi$ στο $(0, \ln 2 - 1)$

Γ4.

$$\int_{-1}^1 x[2x + \ln(x^2 + 1)] dx = \int_{-1}^1 2x^2 dx + \int_{-1}^1 x \ln(x^2 + 1) dx$$

Υπολογισμός του $\int_{-1}^1 x \ln(x^2 + 1) dx$

θέτω $u = x^2 + 1$

$$du = 2x dx \Leftrightarrow 1/2 du = x dx$$

$$x = -1 \Leftrightarrow u = 2$$

$$x = 1 \Leftrightarrow u = 2$$

$$\text{Άρα } \int_2^2 \frac{1}{2} \ln u du = 0$$

Επομένως

$$\int_{-1}^1 x f(x) dx = \int_{-1}^1 2x^2 dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = 2 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right] = \frac{4}{3}$$

ΛΥΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ Δ

f συνεχής $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) \neq x$

$$f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$$

Δ1.

$$f(x) = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt + x$$

Η f συνεχής άρα η $\frac{t}{f(t) - t}$ συνεχής συνάρτηση ως πηλίκο

συνεχών συναρτήσεων άρα η $\int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$ παραγωγίσιμη

οπότε η f παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f(x) = \frac{x}{f(x) - x} + 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) - x}$

Δ2. g παραγωγίσιμη για $x \in \mathbb{R}$ και

$$g'(x) = 2f(x) f'(x) - 2f(x) - 2x f'(x) =$$

$$= 2f(x) \frac{f(x)}{f(x) - x} - 2f(x) - 2x \frac{f(x)}{f(x) - x} =$$

$$= \frac{2f^2(x) - 2f^2(x) + 2x f(x) - 2x f(x)}{f(x) - x} = 0$$

άρα η g σταθερή

$$\Delta 3. f(0) = 3$$

$$g(0) = 9 \text{ άρα } g(x) = 9$$

$$f^2(x) - 2x f(x) = 9 \Leftrightarrow f^2(x) - 2x f(x) = 9 \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = 9 + x^2$$

$$\Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{9 + x^2} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{9 + x^2}$$

θέτω $h(x) = f(x) - x$ και $h(x) \neq 0$, h συνεχής άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο \mathbb{R} .

$$h(0) = f(0) = 3 > 0 \text{ άρα } h(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - x > 0$$

Δ4. Θεωρώ τη συνάρτηση

$$\Phi(x) = \int_x^{x+1} f(t) dx, x \in \mathbb{R}$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη (f συνεχής) οπότε:

$$\Phi'(x) = f(x+1) - f(x)$$

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{x + \sqrt{x^2 + 9}}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$x^2 < x^2 + 9 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow -\sqrt{x^2 + 9} < x < \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{x^2 + 9} < x \Leftrightarrow 0 < x + \sqrt{x^2 + 9}$$

Άρα $f'(x) > 0$ δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα.

Ισχύει ότι

$$x+1 > x \Leftrightarrow f(x+1) > f(x) \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) > 0 \Leftrightarrow \Phi'(x) > 0 \text{ άρα } \Phi \uparrow \text{ στο } \mathbb{R}.$$

Έχουμε $x < x+1 \Leftrightarrow \Phi(x) < \Phi(x+1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int_x^{x+1} f(t) dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t) dt$$