

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη θεωρήματος Fermat – Σελ. σχολ. Βιβλίου 260

A2. Ορισμός ασύμπτωτης – Σελ. σχολ. βιβλίου 200

A3. α. Σ, β. Σ, γ. Λ, δ. Λ, ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. $2|z-3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|=1$

Κύκλος $K(0,3)$, $\rho=1$

B2. $|z-3i|=1 \Leftrightarrow$

$$|z-3i|^2=1 \Leftrightarrow (z-3i)(\bar{z}+3i)=1 \Leftrightarrow \bar{z}+3i=\frac{1}{z-3i}$$

B3. Έστω $z=x+yi$

$$\bar{w}=\bar{z}+3i+\frac{1}{z+3i}=\frac{1}{z-3i}+z-3i=\omega$$

$$w=z-3i+\bar{z}+3i=z+\bar{z}=2x \in \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} |z-3i|=1 \\ z=x+yi \end{array} \right\} \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 2$$

$$-2 \leq \omega \leq 2$$

B4. $|z-\omega|=\left|z-(z-3i)-\frac{1}{z-3i}\right|=\left|z-z+3i-\bar{z}-3i\right|=\left|-\bar{z}\right|=|z|$

ΘΕΜΑ Γ

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f'(0)=f(0)=0$$

$$e^x(f'(x)+f''(x)-1)=f'(x)+xf''(x)$$

Γ1. $f(x)=\ln(e^x-x)$

$$e^x f'(x)+e^x f''(x)-e^x=(x f'(x))+c_2$$

$$(e^x f'(x))-e^x=(x f'(x))+c_2$$

$$e^x f'(x)-x f'(x)=e^x+c_2$$

$$(e^x-x)f'(x)=e^x+c_2$$

Άρα $f'(0)=0$

$$0=e^0+c_2 \Leftrightarrow c_2=-1$$

Αφού $e^x-x=0 \Leftrightarrow e^x=x$

Θεωρώ $g(x)=e^x-x$

$$g'(x)=e^x-1 \quad e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$$

$$g'(x)>0 \Rightarrow e^x-1>0 \Rightarrow e^x>1$$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘		↗

τ. ε.
 $g(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$

Άρα $g(x) \neq 0 \forall x$

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \Rightarrow f(x) = \ln(e^x - x) + c$$

Άλλα $f(0) = 0$ άρα $0 = \ln(e^0 - 0) + c$

$$0 = \ln 1 + c \Rightarrow c = 0$$

Άρα $f(x) = \ln(e^x - x)$, με $x \in \mathbb{R}$

Γ2. Αφού $f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x - x} > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗

τ. ε.
 $f(0) = \ln(e^0 - 0) = \ln 1 = 0$

Γ3. Αφού $f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \Rightarrow$

$$f''(x) = \frac{(e^x - 1)'(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - x)'}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} =$$

$$= \frac{e^{2x} - xe^x - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2} = \frac{\cancel{e^{2x}} - xe^x - \cancel{e^{2x}} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x - xe^x - 1 = 0$$

Έστω $h(x) = 2e^x - xe^x - 1 = 0$, συνεχής και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

$$h'(x) = 2e^x - e^x - xe^x = e^x - xe^x = e^x(1 - x)$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x(1 - x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	↗		↘

τ. μ.
 $h(1) = 2e^1 - 1e^1 - 1 = e - 1 > 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - x e^x - 1) = -1$$

$$A_1 = (-\infty, 1] \quad h \nearrow$$

$$h(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), h(1) \right] = (-1, e-1]$$

$0 \in h(A_1)$, άρα έχει μία τουλάχιστον ρίζα και επειδή είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα είναι μοναδική

$$A_2 = [1, +\infty) \quad h \searrow$$

$$h(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x), h(1) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - x e^x - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x)e^x = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$\text{Άρα } h(A_2) = (-\infty, e-1]$$

$0 \in h(A_2)$, άρα έχει μία τουλάχιστον ρίζα και επειδή είναι γνησίως φθίνουσα, η ρίζα είναι μοναδική

$$\text{Γ4. } \ln(e^x - x) = \sigma \nu x$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \ln(e^x - x) - \sigma \nu x$

Η φ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών

$$\varphi(0) = \ln(e^0 - 0) - \sigma \nu 0 = \ln 1 - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left(e^{\pi/2} - \frac{\pi}{2}\right) - \sigma \nu \frac{\pi}{2} = \ln\left(e^{\pi/2} - \frac{\pi}{2}\right) > 0$$

Άρα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και άρα υπάρχει

τουλάχιστον μία ρίζα. Όμως $\varphi'(x) = (\ln(e^x - x) - \sigma \nu x)' = \frac{e^x - 1}{e^x - x} + \eta \mu x > 0$. Άρα η φ έχει

ακριβώς μία ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Delta 1. 1 - f(x) = e^{2x} \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$$

$$\text{Θέτω } x + t = u$$

$$dt = du$$

$$t = 0 \Rightarrow u = x$$

$$t = -x \Rightarrow u = 0$$

$$\frac{1 - f(x)}{e^{2x}} = \int_x^0 \frac{e^{2(u-x)}}{g(u)} du$$

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_x^0 \frac{1}{e^{2x}} \frac{e^{2(u-x)}}{g(u)} du$$

$$1-f(x) = \int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)} du$$

$$f(x)-1 = \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$$

$$\text{Όμοια } g(x)-1 = \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du$$

Επειδή e^{2x} , f , g συνεχείς, τότε $\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$ και $\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du$ παραγωγίσιμες

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \quad \text{Όμοίως: } g'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)}$$

$$f'(x)g(x) = f(x) \cdot g'(x) \Leftrightarrow$$

$$f'(x)g(x) - f(x) \cdot g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = c \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{Για } x=0 \Rightarrow f(0)=1=g(0) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

$$\Delta 2. f'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow f'(x) \cdot f(x) = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 2f'(x) \cdot f(x) = 2e^{2x}$$

$$[f^2(x)]' = (e^{2x})'$$

$$f^2(x) = e^{2x} + c \quad (x=0 \Rightarrow f(0)=1 \Rightarrow c=0)$$

$$f^2(x) = e^{2x} \stackrel{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x) = e^x$$

$$\Delta 3. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^{1/x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\frac{1}{x} e^{1/x}} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{ye^y}$$

$$\text{Θέτω } y = \frac{1}{x}, x \rightarrow 0^- \Rightarrow y \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} ye^y = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{y}{\frac{1}{e^y}} \stackrel{(D.H.)}{=} \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\frac{1}{e^y}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} (-e^y) = 0$$

$$y \rightarrow -\infty \Rightarrow y < 0 \text{ άρα } ye^y < 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{ye^y} = -\infty$$

$$\Delta 4. E(\Omega) = \int_0^1 |F(x)| dx$$

$$F'(x) = e^{x^2} > 0 \Rightarrow F \nearrow$$

$$x > 1 \Rightarrow F(x) > 0$$



$$x < 1 \Rightarrow F(x) < 0$$

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_0^1 -F(x) dx = -\int_0^1 x'F(x) dx = -[xF(x)]_0^1 + \int_0^1 xe^{x^2} dx = \\ &= \left[\frac{e^{x^2}}{2} \right]_0^1 = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e-1}{2} \end{aligned}$$