

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και  $c$  σταθερός πραγματικός αριθμός, να αποδείξετε με τη χρήση του ορισμού της παραγώγου ότι

$$(c f(x))' = c f'(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 7**

- A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 4**

- A3.** Πότε μια ποσοτική μεταβλητή λέγεται διακριτή και πότε συνεχής;

**Μονάδες 4**

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Αν για τη συνάρτηση  $f$  ισχύει  $f'(x_0) = 0$ , για  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ , και η παράγωγός της  $f'$  διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του  $x_0$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$  και δεν παρουσιάζει ακρότατο στο διάστημα αυτό.

(μονάδες 2)

- β)** Για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει:

$$P(A - B) = P(B) - P(A \cap B)$$

(μονάδες 2)

- γ)** Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκονται στο διάστημα  $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ , όπου  $\bar{x}$  η μέση τιμή και  $s$  η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

(μονάδες 2)

- δ)** Αν  $x_i$  είναι τιμή μιας ποσοτικής μεταβλητής  $X$ , τότε η αθροιστική συχνότητα  $N_i$  εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες της τιμής  $x_i$

(μονάδες 2)

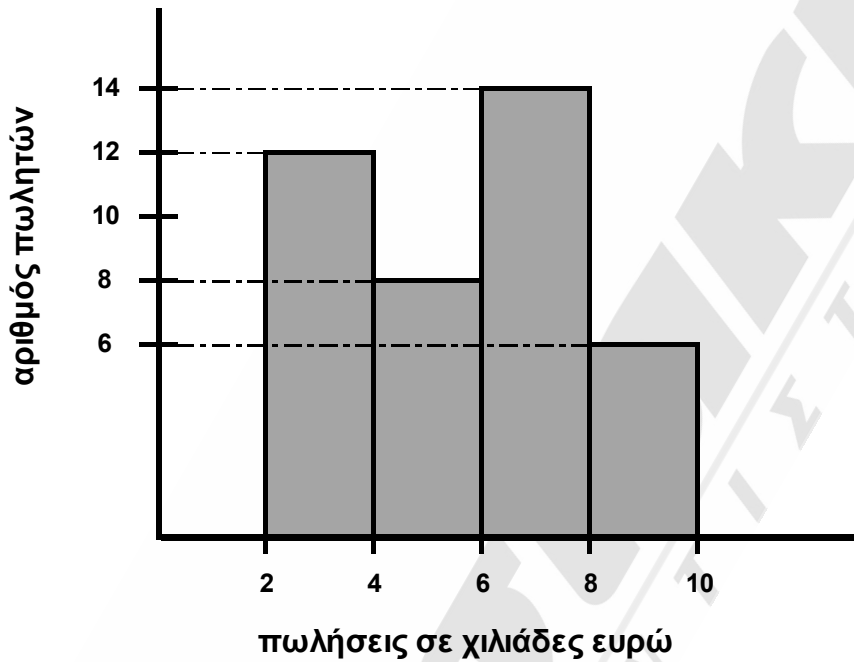
- ε)** Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς, τα εμβαδά ή, ισοδύναμα, τα τόξα των οποίων είναι

ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες  $v_i$  ή τις σχετικές συχνότητες  $f_i$  των τιμών  $x_i$  της μεταβλητής. (μονάδες 2)

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων, το οποίο παριστάνει τις πωλήσεις σε χιλιάδες ευρώ που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους.



**B1.** Να βρείτε το πλήθος των πωλητών της εταιρείας.

**Μονάδες 5**

**B2.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων κατάλληλα συμπληρωμένο, δικαιολογώντας τη στήλη με τις σχετικές συχνότητες  $f_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές $x_i$	Συχνότητα $v_i$	Σχετική συχνότητα $f_i$
$[\cdot, \cdot)$			
$[\cdot, \cdot)$			
$[\cdot, \cdot)$			
$[\cdot, \cdot)$			
Σύνολο			

**Μονάδες 8**

- B3.** α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των πωλήσεων του έτους. (μονάδες 6)
- β) Να βρείτε το πλήθος των πωλητών που έκαναν πωλήσεις τουλάχιστον 4,5 χιλιάδων ευρώ (θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανομημένες). (μονάδες 6)

**Μονάδες 12**

### ΘΕΜΑ Γ

Ένα δοχείο περιέχει κόκκινες (Κ), άσπρες (Α) και πράσινες (Π) μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία μία μπάλα. Η πιθανότητα να προκύψει κόκκινη μπάλα είναι  $P(K) = x_1$ , ενώ η πιθανότητα να προκύψει άσπρη μπάλα είναι  $P(A) = x_2$ , όπου  $x_1, x_2$  είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης

$$f(x) = 4x^3 - \frac{7}{2}x^2 + x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \text{ με } x_1 < x_2$$

- Γ1.** Να βρείτε τις πιθανότητες  $P(K)$ ,  $P(A)$  και  $P(\Pi)$ , όπου  $P(\Pi)$  η πιθανότητα να προκύψει πράσινη μπάλα.

**Μονάδες 10**

- Γ2.** Αν  $P(K) = \frac{1}{4}$  και  $P(A) = \frac{1}{3}$ , να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

- Γ: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι κόκκινη ή άσπρη»  
Δ: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι ούτε κόκκινη ούτε άσπρη»  
Ε: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι άσπρη ή να μην είναι πράσινη».

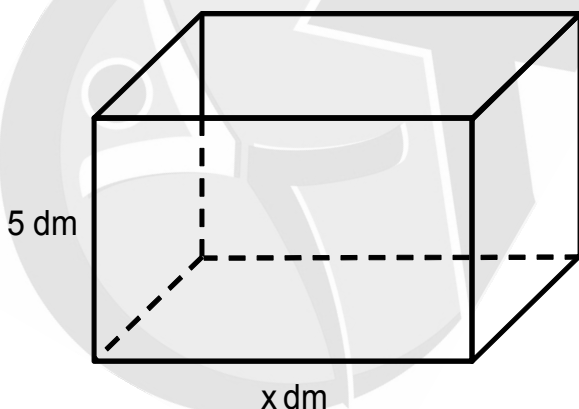
**Μονάδες 9**

- Γ3.** Αν οι άσπρες μπάλες είναι κατά τέσσερις (4) λιγότερες από τις πράσινες μπάλες, να βρείτε πόσες μπάλες έχει το δοχείο.

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση ορθογώνιο και ανοικτό από πάνω.



Το ύψος του κουτιού είναι 5 dm.  
Η βάση του κουτιού έχει σταθερή περίμετρο 20 dm και μία πλευρά της είναι  $x$  dm με  $0 < x < 10$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνολική επιφάνεια του κουτιού ως συνάρτηση του  $x$  είναι  
$$E(x) = -x^2 + 10x + 100, \quad x \in (0, 10)$$

και να βρείτε για ποια τιμή του  $x$  το κουτί έχει μέγιστη επιφάνεια.

**Μονάδες 8**

Στη συνέχεια, θεωρούμε τα σημεία  $A_i(x_i, y_i)$ , όπου  $y_i = E(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 15$   
με  $5 = x_1 < x_2 < \dots < x_{14} < x_{15} = 9$

**Δ2.** Αν το δείγμα των τετμημένων  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 15$  των παραπάνω σημείων  
 $A_i(x_i, y_i)$

- δεν είναι ομοιογενές
- έχει μέση τιμή  $\bar{x} = 8$  και
- τυπική απόκλιση  $s$  τέτοια, ώστε

$$2s^2 - 5s + 2 = 0$$

τότε:

**α)** να αποδείξετε ότι  $s = 2$

(μονάδες 4)

**β)** να βρείτε τη μέση τιμή των  $x_i^2$ , με  $i = 1, 2, \dots, 15$

$$\text{Δίνεται ότι: } s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^v t_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^v t_i \right)^2}{v} \right\}$$

(μονάδες 4)

**Μονάδες 8**

**Δ3.** Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα παραπάνω σημεία  $A_i(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 15$   
Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου:

$$B = \{A_i(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, 15 \text{ τέτοια, ώστε } y_i > -4x_i + 9R + 1\},$$

όπου  $R$  είναι το εύρος των  $y_i = E(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 15$

**Μονάδες 9**