ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΕΠΑΛ Α΄ΟΜΑΔΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1) Σχολ. Βιβλίο «Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής» – σελ. 28

Α2) Σχολ. Βιβλίο «Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής» – σελ. 87

Α3) **α)** **Σ** **β)** **Λ** **γ)** **Σ** **δ)** **Σ** **ε)** **Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Ισχύει $\nu_5 = \nu_1 = 5$ και $\nu = 20$, τότε από τον τύπο $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$ έχουμε

$f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{5}{20} = 0,25$, άρα $f_1\% = 25$

$f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} = \frac{4}{20} = 0,2$, άρα $f_2\% = 20$

$f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} \Leftrightarrow \nu_3 = \nu \cdot f_3 = 20 \cdot 0,1 = 2$ διότι το $f_3\% = 10\%$, άρα $f_3 = 0,3$, άρα $\nu_3 = 2$

Ισχύει ότι $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = \nu \Leftrightarrow 5 + 4 + 2 + \nu_4 + 5 = 20 \Leftrightarrow \nu_4 = 20 - 16 = 4$

$f_4 = \frac{\nu_4}{\nu} = \frac{4}{20} = 0,2$, άρα $f_4\% = 20$

$f_5\% = f_1\% = 25$

Αριθμός πιστωτικών καρτών x_i	**Αριθμός υπαλλήλων** ν_i	**Αθροιστική Συχνότητα** N_i	**Σχετική Συχνότητα** $f_i\%$	$x_i\nu_i$
0	5	5	25	0
1	4	9	20	4
2	2	11	10	4
3	4	15	20	12
4	5	20	25	20
ΣΥΝΟΛΑ	**20**		100	40

Β2.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i \nu_i}{\nu} = \frac{40}{20} = 2$$

Β3.

Οι υπάλληλοι που έχουν το πολύ τρεις κάρτες αντιστοιχούν στις συχνότητες $\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3,\ \nu_4$ άρα

$N_4 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 5 + 4 + 2 + 4 = 15$ υπάλληλοι

Β4.

Οι υπάλληλοι που έχουν τουλάχιστον δύο κάρτες αντιστοιχούν στις συχνότητες $\nu_3,\ \nu_4,\ \nu_5$ άρα

$\nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = 2 + 4 + 5 = 11$ υπάλληλοι

Σε ποσοστό $\frac{11}{20} = \frac{55}{100} = 55\%$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}, \text{ τότε } f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' + \left(\frac{1}{2}\right)' = \frac{(x)'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} + 0 =$$

$$= \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

Γ2.

$$f'(-1) = \frac{1-(-1)^2}{\left[(-1)^2+1\right]^2} = \frac{1-1}{2^2} = 0$$

$$f'(1) = \frac{1-1^2}{(1^2+1)^2} = \frac{1-1}{2^2} = 0$$

Γ3.

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}, \text{ τότε } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			Τ.Ε.		Τ.Μ.		

για $x \in (-\infty, -1]$ η f γνησίως φθίνουσα για $x \in [-1,1]$ η f γνησίως αύξουσα

για $x \in [1,+\infty)$ η f γνησίως φθίνουσα

για $x=-1$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(-1)=\frac{-1}{(-1)^2+1}+\frac{1}{2}=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}=0$

για $x=1$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(1)=\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

Γ4.

Επειδή τα 2015, 2016 είναι μεγαλύτερα της μονάδας όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα, θα ισχύει $2015<2016 \Rightarrow f(2015)>f(2016)$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(x-4)}(x-2)}{\cancel{(x-4)}}=\lim_{x\to 4}(x-2)=2$$

Δ2.

για $\alpha=2$ τότε $f(x)=x^2+2x-3$

οπότε $f'(x)=2x+2$

Δ3.

Η γενική μορφή εξίσωσης εφαπτομένης στο σημείο $M(x_0,f(x_0))$ είναι

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ (1)

για $x_0=-2$, $f(x_0)=f(-2)=(-2)^2+2(-2)-3=\cancel{4}-\cancel{4}-3=-3$

και $f'(-2)=2(-2)+2=-4+2=-2$

Άρα $(1)\Rightarrow y-f(-2)=f'(-2)(x+2)$ ή

$y-(-3)=-2(x+2)$ ή

$y+3=-2x-4$ ή

$y=-2x-7$

Δ4.

$\varepsilon: y=-2x-7$ με $\bar{x}=2$, τότε ισχύει $y_i=-2x_i-7$, $i=1,2,...,5$

$$\bar{y}=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5}{5}=\frac{(-2x_1-7)+(-2x_2-7)+(-2x_3-7)+(-2x_4-7)+(-2x_5-7)}{5}=$$

$$=\frac{-2x_1-2x_2-2x_3-2x_4-2x_5+5\cdot(-7)}{5}=\frac{-2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)-35}{5}=$$

$$-2\cdot\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}\right)-\frac{35}{5}=-2\bar{x}-7=-2\cdot 2-7=-4-7=-11$$

Άρα $\bar{y}=-11$