Α Ν Ω Τ Α Τ Ο Σ Υ Μ Β Ο Υ Λ Ι Ο Ε Π Ι Λ Ο Γ Η Σ Π Ρ Ο Σ Ω Π Ι Κ Ο Υ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΕΤΟΥΣ 2006
ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ

Κλάδος: **ΠΕ 03 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ **ΠΡΩΤΗ** ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ
(**Γνωστικό αντικείμενο**)
Σάββατο 27-1-2007

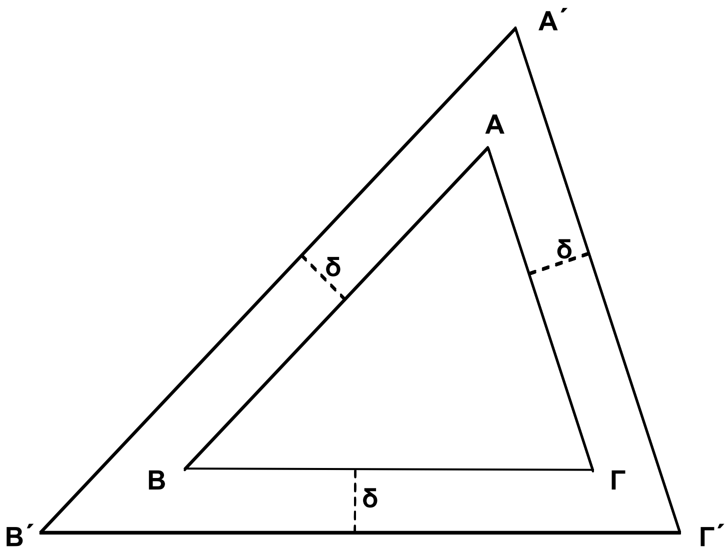
Α

*Να απαντήσετε στα επόμενα δύο (2) ισοδύναμα **ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ**. Να αναπτύξετε τις απαντήσεις σας στο ειδικό **ΤΕΤΡΑΔΙΟ**. Κάθε ερώτημα συμμετέχει κατά **25 %** στη διαμόρφωση της βαθμολογίας της πρώτης θεματικής ενότητας.*

ΕΡΩΤΗΜΑ 1ο:

α) Να ορίσετε την τριγωνομετρική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού $z \neq 0$ και στη συνέχεια να διατυπώσετε και να αποδείξετε τον τύπο που υπολογίζει τη δύναμη z^ν, όπου ν θετικός ακέραιος.

β) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με εμβαδό Ε και περίμετρο Π. Οι ευθείες των πλευρών του τριγώνου μετακινούνται παράλληλα προς το εξωτερικό του ΑΒΓ κατά απόσταση δ (βλ. σχήμα). Να υπολογιστεί το εμβαδό και η περίμετρος του νέου τριγώνου Α΄Β΄Γ΄ συναρτήσει των Ε, Π και δ.



γ) Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση $f'(x)=f(x)\forall x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(x)=ce^x, \forall x\in\mathbb{R}$ και

ii) Να λύσετε με τη βοήθεια του ερωτήματος **i)** τη διαφορική εξίσωση $2xh(x)=(x^2+1)[h(x)-h'(x)]+1$, όπου $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $h(0)=0$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 2ο:

α) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε $f'(x_0)=0$.

β) Ο παρακάτω πίνακας δίνει τα αποτελέσματα των μετρήσεων της συστολικής πίεσης και της ηλικίας 10 ανδρών:

Ηλικία (έτη), X	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
Πίεση (mmHg), Y	110	120	120	130	130	140	150	140	150	170

i) Να βρεθεί η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων $\hat{y}=\hat{a}+\hat{\beta}x$ και

ii) Να βρεθεί η αναμενόμενη συστολική πίεση για έναν άνδρα ηλικίας 80 ετών (οι υπολογισμοί να γίνουν με ακρίβεια χιλιοστού).

Υπενθυμίζεται ότι οι $\hat{a}$ και $\hat{\beta}$ δίνονται από τους τύπους:

$$\hat{\beta}=\frac{v\sum_{i=1}^{v}x_iy_i-(\sum_{i=1}^{v}x_i)(\sum_{i=1}^{v}y_i)}{v\sum_{i=1}^{v}x_i^2-(\sum_{i=1}^{v}x_i)^2},\hat{a}=\overline{y}-\hat{\beta}\overline{x}$$

όπου $\overline{x}$ και $\overline{y}$ είναι οι μέσες τιμές των $x_1,\dots x_v$ και $y_1,\dots y_v$ αντίστοιχα.

γ) Έστω ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}2 & k\\ -k & 1\end{pmatrix}$. Αν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ και πραγματικός αριθμός λ, ώστε να ισχύει η σχέση $AX=\lambda X$, τότε να βρεθούν οι ακέραιες τιμές του k.

B

*Τα επόμενα δύο **ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ** (**3ο** και **4ο**) αποτελούνται το καθένα από έξι (6) ισοδύναμες ερωτήσεις. Να απαντήσετε στις ερωτήσεις αυτές με τη μέθοδο των πολλαπλών επιλογών στο ειδικό **ΤΕΤΡΑΔΙΟ**, σημειώνοντας δίπλα στον αριθμό κάθε σύντομης ερώτησης το γράμμα (α, β, γ, δ) που αντιστοιχεί στην απάντηση της επιλογής σας, ως εξής:*

1 .... **α)** ή **β)** ή **γ)** ή **δ)**
2 .... **α)** ή **β)** ή **γ)** ή **δ)**
....
12 .... **α)** ή **β)** ή **γ)** ή **δ)**

ΕΡΩΤΗΜΑ 3ο:

- *Το ερώτημα συμμετέχει κατά **25 %** στη διαμόρφωση της βαθμολογίας της πρώτης θεματικής ενότητας. Επομένως, κάθε ερώτηση συμμετέχει με **4 1/6 μονάδες** στο βαθμό της πρώτης θεματικής ενότητας.*

1. **Το εμβαδό του επιπέδου χωρίου που περικλείεται από την παραβολή με εξίσωση $y = x^2$ τον ημιάξονα Ox και την εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο (1,1) ισούται με:**

   α) $\frac{1}{10}$

   β) $\frac{1}{11}$

   γ) $\frac{1}{12}$

   δ) $\frac{1}{13}$

---

2. **Σε έναν κύκλο είναι εγγεγραμμένο ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Περιστρέφουμε τα δύο σχήματα (κύκλος και τρίγωνο) γύρω από τη διάμετρο του κύκλου που διέρχεται από μία κορυφή του τριγώνου κατά 360°. Αν V_K είναι ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται από την περιστροφή του κύκλου και V_T είναι ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται από την περιστροφή του τριγώνου, τότε ο λόγος $\frac{V_K}{V_T}$ ισούται με:**

   α) $\frac{40}{13}$

   β) $\frac{32}{9}$

   γ) $\frac{22}{8}$

   δ) $\frac{10}{3}$

---

3. **Ο όρος του αναπτύγματος του διωνύμου $\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^{12}$ που είναι ανεξάρτητος από τον θετικό αριθμό x έχει συντελεστή ίσο με:**

   α) 205
   β) 315
   γ) 495
   δ) 525

---

4. **Η τιμή της παράστασης $K = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7}\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{7}\sigma\upsilon\nu\frac{8\pi}{7}$ ισούται με:**

   α) $\frac{1}{8}$

   β) $\frac{1}{7}$

   γ) $\frac{1}{6}$

   δ) $\frac{1}{5}$

---

5. **Το ολοκλήρωμα** $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx$ **ισούται με:**

α) $\frac{1}{e}$

β) $e-1$

γ) $2-\frac{1}{e}$

δ) $2(1-\frac{1}{e})$

---

6. **Έστω** $\vec{a}$ **και** $\vec{\beta}$ **δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου με ίσα μέτρα. Αν τα διανύσματα** $\vec{x}=\vec{a}+2\vec{\beta}$ **και** $\vec{y}=5\vec{a}-4\vec{\beta}$ **είναι κάθετα μεταξύ τους, τότε η γωνία που σχηματίζουν τα** $\vec{a}$ **και** $\vec{\beta}$ **ισούται με:**

α) 30°.
β) 45°.
γ) 60°.
δ) 90°.

ΕΡΩΤΗΜΑ 4^{o}:

- *Το ερώτημα συμμετέχει κατά **25 %** στη διαμόρφωση της βαθμολογίας της πρώτης θεματικής ενότητας. Επομένως, κάθε ερώτηση συμμετέχει με **4 $^{1}/_{6}$ μονάδες** στο βαθμό της πρώτης θεματικής ενότητας.*

7. **Συνδρομητής τηλεφωνικής εταιρείας, σχηματίζοντας τον αριθμό τηλεφώνου ενός φίλου του, ξέχασε τα δύο τελευταία ψηφία και, γνωρίζοντας ότι αυτά τα ψηφία είναι διαφορετικά μεταξύ τους, τα σχημάτισε στην τύχη. Η πιθανότητα να σχημάτισε το σωστό αριθμό είναι:**

α) $\frac{1}{100}$

β) $\frac{1}{90}$

γ) $\frac{1}{45}$

δ) $\frac{1}{10}$

---

8. **Δίνεται η συνάρτηση** $f(x)=\begin{cases} \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}, & \text{αν x} \neq 0 \\ \lambda, & \text{αν } x=0 \end{cases}$ **.**

Για να είναι η συνάρτηση συνεχής στο σημείο $x=0$**, η τιμή του** λ **πρέπει να ισούται με:**

α) 0

β) $\frac{1}{3}$

γ) $\frac{1}{2}$

δ) 1

---

9. **Η τιμή της παράστασης** $y=\log_3 \sqrt{81\sqrt[3]{27}}$ **ισούται με:**

α) 3

β) $\frac{5}{2}$

γ) $\frac{7}{3}$

δ) $\frac{9}{4}$

---

10. **Αν** $f(x)=(x^2+x+5)\cdot\varphi(x)$**, όπου** $\varphi(0)=1$ **και** $\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-1}{x}=1$ **, τότε η** $f'(0)$ **ισούται με:**

α) 4
β) 0
γ) 6
δ) 10

---

11. **Δίνεται η παραβολή με εξίσωση** $y=x^2-5x+6$ **και τα σημεία της παραβολής** $P_1(x_1,y_1)$ **και** $P_2(x_2,y_2)$ **με** $x_1=3$ **και** $x_2=5$. **Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη προς τη χορδή** P_1P_2 **είναι:**

α) $y=3x-10$

β) $y=2x-5$

γ) $y=3x-1$

δ) $y=x+2$

---

12. **Σε τετράγωνο πλευράς α εγγράφεται κύκλος. Στη συνέχεια στον κύκλο αυτό εγγράφεται τετράγωνο και στο τετράγωνο αυτό εγγράφεται νέος κύκλος. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ' άπειρον. Αν** E_T **είναι το άθροισμα των εμβαδών των απείρου πλήθους τετραγώνων και** E_K **είναι το άθροισμα των εμβαδών των απείρου πλήθους κύκλων, τότε ο λόγος** $\frac{E_T}{E_K}$ **ισούται με:**

α) $\frac{5}{4}$

β) $\frac{4}{\pi}$

γ) $\frac{\pi}{3}$

δ) $\frac{3}{\sqrt{\pi}}$

ΑΝΩΤΑΤΟ ΣΥΜΒΟΥΛΙΟ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΠΡΟΣΩΠΙΚΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΕΤΟΥΣ 2006
ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ

Κλάδος: **ΠΕ 03 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ **ΔΕΥΤΕΡΗ** ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ
Κυριακή 28-1-2007

ΕΙΔΙΚΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ

(συντελεστής βαρύτητας 60%)

*Να απαντήσετε στα επόμενα δύο (2) ισοδύναμα **ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ**. Για τις απαντήσεις σας να χρησιμοποιήσετε το ειδικό **ΤΕΤΡΑΔΙΟ**.*

ΕΡΩΤΗΜΑ 1^{ο}:

Πρόκειται να διδάξετε σε μαθητές Γ΄ Λυκείου τον υπολογισμό του εμβαδού του επιπέδου χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g, που είναι ορισμένες και συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. Να προτείνετε έναν τρόπο παρουσίασης αυτού του θέματος, σε ένα δίωρο μάθημα, ώστε να καλύπτονται όλες οι δυνατές περιπτώσεις. Να θεωρηθεί δεδομένο ότι οι μαθητές γνωρίζουν ότι για μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχή και με $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι:

$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

ΕΡΩΤΗΜΑ 2^{ο}:

Μετά την ολοκλήρωση της ύλης των μαθηματικών της Β΄ Λυκείου θετικής κατεύθυνσης, στην ώρα των ασκήσεων παρακολουθήσατε τον επόμενο διάλογο μεταξύ δύο μαθητών, που συζητούν για τη σύγκριση μεταξύ των αριθμών 1,23999…. και 1,24:

> ***Μαθητής Α:*** *Ξέρουμε ότι, για να συγκρίνουμε δύο δεκαδικούς αριθμούς, συγκρίνουμε πρώτα τα ακέραια μέρη. Μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει μεγαλύτερο ακέραιο μέρος. Αν αυτά είναι ίσα, συνεχίζουμε συγκρίνοντας τα ψηφία μετά την υποδιαστολή. Μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει μεγαλύτερο το πρώτο διαφορετικό δεκαδικό ψηφίο. Επομένως ο 1,24 είναι μεγαλύτερος από τον 1,23999…*
>
> ***Μαθητής Β:*** *Μπορείς να μου πεις έναν αριθμό που βρίσκεται ανάμεσα σε αυτούς;*
>
> ***Μαθητής Α:*** *(μετά από σκέψη) Ο αριθμός 1,23999…1*
>
> ***Μαθητής Β:*** *Πόσα 9 υπάρχουν πριν το 1;*
>
> ***Μαθητής Α:*** *(Σκέφτεται και δεν απαντά)*
>
> ***Μαθητής Β:*** *Μήπως ο 1,24 είναι ο αμέσως επόμενος του 1,23999….;*
>
> ***Μαθητής Α:*** *(μετά από σκέψη) Μάλλον.*

Οι δύο μαθητές σάς κοιτάζουν με απορία, ζητώντας βοήθεια.

α) Ποια γνωστικά προβλήματα κρίνετε ότι έχουν οι μαθητές αυτοί, με βάση την παραπάνω συζήτηση;

β) Πώς θα τους βοηθούσατε να τα ξεπεράσουν;