ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ ΜΠΟΝΙΑ
ΒΟΡΕΙΟΥ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ στην Ειδική Διδακτική
ΠΕ 03 – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Κεΐσογλου Στέφανος M.ed
ΕΕΤ Παν/μιο Αθηνών

Ενδεικτικές απαντήσεις στα θέματα της ειδικής Διδακτική των Μαθηματικών για υποψηφίους της ειδικότητας ΠΕ03

Σημείωση: Κατ αρχήν θα πρέπει να επισημάνουμε ότι οι προσεγγίσεις που περιγράφουμε παρακάτω είναι ενδεικτικές και σε καμία περίπτωση δεν αποτελούν την μοναδική, σωστή και αδιαπραγμάτευτη ανάλυση. Αυτή άλλωστε είναι και μία από τις βασικές αρχές της διδακτικής των Μαθηματικών

ΕΡΩΤΗΜΑ 1^o :

«Πρόκειται να διδάξετε σε μαθητές Γ΄ Λυκείου τον υπολογισμό του εμβαδού του επιπέδου χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g, που είναι ορισμένες και συνεχείς στο [α, β] και τις ευθείες x =α και x= β . Να προτείνετε έναν τρόπο παρουσίασης αυτού του θέματος, σε ένα δίωρο μάθημα, ώστε να καλύπτονται όλες οι δυνατές περιπτώσεις.
Να θεωρηθεί δεδομένο ότι οι μαθητές γνωρίζουν ότι για μια συνάρτηση f: [α, β] → ℝ συνεχή και με f(x) ≥0 για κάθε x που ανήκει στο [α, β] το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x= α και x= β και τον άξονα x x ′ είναι: $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ »

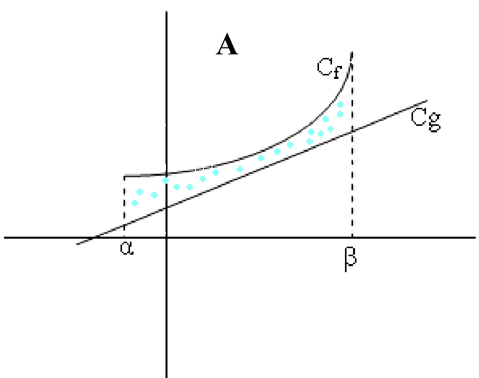
Ανάλυση

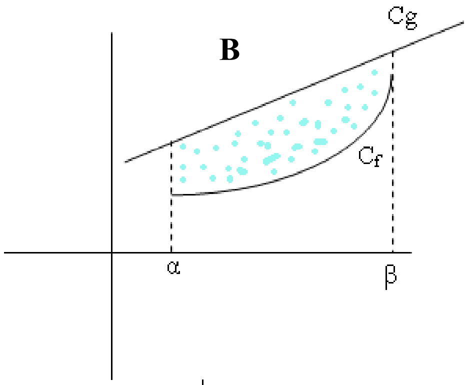
1. Κατ αρχήν οι στόχοι που θα τεθούν θα πρέπει να αφορούν στην δυνατότητα των μαθητών

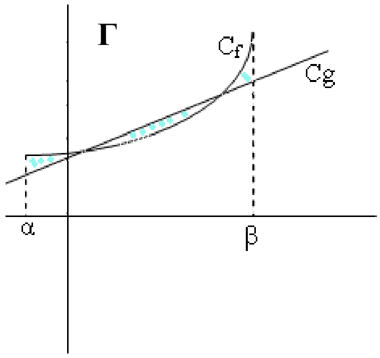
- Να ***διακρίνουν*** τις περιπτώσεις εμβαδών και να τις συνοψίζουν σε μία κάνοντας χρήση της έννοιας του απολύτου.
- Να ***χρησιμοποιούν*** το ολοκλήρωμα ως αναλυτικό εργαλείο για τον υπολογισμό εμβαδών.
- Να ***συνδέουν*** την γεωμετρική παράσταση του εμβαδού με την αλγεβρική αναλυτική έκφραση του ολοκληρώματος.

2. Η μέθοδος που θα ακολουθήσει ο διδάσκων θα μπορούσε να είναι η κατευθυνόμενη ανακάλυψη μέσω διαλόγου.

3. Κατά την πρώτη διδακτική ώρα ο διδάσκων δίνει τα παρακάτω σχήματα στους μαθητές και απευθύνει ερωτήσεις της μορφής:







- Πως μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της C_f και του άξονα χ΄χ;
- Πως μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της C_g και του άξονα χ΄χ;

Ο στόχος εδώ είναι να ανακαλέσουν οι μαθητές τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις και συγχρόνως να αποκτήσουν μία διαίσθηση για το βασικό ερώτημα που θα ακολουθήσει.
Ο διδάσκων στην συνέχεια τους θέτει το ερώτημα «Πως μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν μεταξύ των γραφικών παραστάσεων στο σχήμα Α» και διαπραγματεύεται με τους μαθητές την προφανή λύση της αφαίρεσης των δύο εμβαδών επομένως και την λύση $\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)-g(x)]dx$ Στην συνέχεια διαπραγματεύεται τα άλλα δύο σχήματα με στόχο την κάλυψη των βασικών περιπτώσεων που αντιστοιχούν στις σχετικές θέσεις των δύο συναρτήσεων.
Τέλος θα ακολουθήσουν δύο η τρεις εφαρμογές τις οποίες ο διδάσκων θα έχει επιλέξει κα οι οποίες θα καλύπτουν και τις τρεις περιπτώσεις που έχει διαπραγματευτεί με τους μαθητές.
Κατά την δεύτερη διδακτική ώρα οι μαθητές θα πρέπει να υπολογίσουν εμβαδά μεταξύ γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων οι οποίες δεν παίρνουν μόνο θετικές τιμές.
Ο διδάσκων αρχικά θα πρέπει να διαπραγματευτεί με τους μαθητές τον υπολογισμό του εμβαδού του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του άξονα χ΄χ και της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με αρνητικές τιμές.
Στην συνέχεια δίνει στους μαθητές το πρόβλημα του υπολογισμού εμβαδού μεταξύ γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων οι οποίες παίρνουν και αρνητικές τιμές στο διάστημα [α, β].
Τέλος ζητά από τους μαθητές να συνοψίσουν τα συμπεράσματά τους και να διατυπώσουν έναν ή περισσότερους κανόνες που να αφορούν στον υπολογισμό εμβαδού μεταξύ γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων.

Ακολουθούν και πάλι επιλεγμένες εφαρμογές.

Σημείωση:

1. Μία άλλη κατανομή της διδακτέας ύλης είναι η εξής:

Κατά την πρώτη ώρα ο διδάσκων επεξεργάζεται με τους μαθητές τις δύο πρώτες περιπτώσεις για όλες τις θέσεις των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων (πάνω από τον χ΄χ, κάτω από τον χ΄χ). Την δεύτερη ώρα μπορεί να γίνει επεξεργασία της περίπτωσης κατά την οποία οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων τέμνονται.

2. Από την στιγμή που το κείμενο της ερώτησης αναφέρεται σε ‘παρουσίαση’ θα μπορούσε να αναπτυχθεί διάλογος μεταξύ του διδάσκοντα και των μαθητών με τον διδάσκοντα να κατασκευάζει τα σχήματα στον πίνακα. Ακόμη θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει διαφάνειες. Ακόμη θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει φύλλα εργασίας (ένα ή δύο) τα οποία θα περιέχουν κατάλληλα σχήματα και ερωτήσεις τις οποίες θα διαπραγματευτεί με τους μαθητές.

ΕΡΩΤΗΜΑ 2$^{\text{Ο}}$:

«Μετά την ολοκλήρωση της ύλης των μαθηματικών της Β΄ Λυκείου θετικής κατεύθυνσης, στην ώρα των ασκήσεων παρακολουθήσατε τον επόμενο διάλογο μεταξύ δύο μαθητών, που συζητούν για τη σύγκριση μεταξύ των αριθμών 1,23999…. και 1,24:
Μαθητής Α: *Ξέρουμε ότι, για να συγκρίνουμε δύο δεκαδικούς αριθμούς, συγκρίνουμε πρώτα τα ακέραια μέρη. Μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει μεγαλύτερο ακέραιο μέρος. Αν αυτά είναι ίσα, συνεχίζουμε συγκρίνοντας τα ψηφία μετά την υποδιαστολή. Μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει μεγαλύτερο το πρώτο διαφορετικό δεκαδικό ψηφίο. Επομένως ο 1,24 είναι μεγαλύτερος από τον 1,23999…*
Μαθητής Β: *Μπορείς να μου πεις έναν αριθμό που βρίσκεται ανάμεσα σε αυτούς;*
Μαθητής Α: *(μετά από σκέψη) Ο αριθμός 1,23999…1*
Μαθητής Β: *Πόσα 9 υπάρχουν πριν το 1;*
Μαθητής Α: *(Σκέφτεται και δεν απαντά)*
Μαθητής Β: *Μήπως ο 1,24 είναι ο αμέσως επόμενος του 1,23999….;*
Μαθητής Α: *(μετά από σκέψη) Μάλλον.*
Οι δύο μαθητές σάς κοιτάζουν με απορία, ζητώντας βοήθεια.
α) Ποια γνωστικά προβλήματα κρίνετε ότι έχουν οι μαθητές αυτοί, με βάση την παραπάνω
συζήτηση;
β) Πώς θα τους βοηθούσατε να τα ξεπεράσουν;»

Ανάλυση

Κάθε ανάλυση ενός διδακτικού επεισοδίου προϋποθέτει την ύπαρξη ενός ή περισσοτέρων θεωρητικών μοντέλων μέσω των οποίων θα υλοποιηθεί η ανάλυση αυτή.
Στο συγκεκριμένο διδακτικό επεισόδιο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την έννοια του ‘εμποδίου’ και την έννοια του ‘γνωστικού σχήματος’ (Κεΐσογλου 203-217) για την διδακτική ανάλυση του διαλόγου των μαθητών.
Το βασικό γνωστικό εμπόδιο που συναντούν οι μαθητές που είχαν τον συγκεκριμένο διάλογο είναι οι άπειρες διαδικασίες. Το εμπόδιο αυτό θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως ‘επιστημολογικό’ αφού σχετίζεται με τις δυσκολίες που συνάντησε και η

μαθηματική κοινότητα στην προσπάθεια να αποσαφηνίσει την έννοια του ορίου και την έννοια του απείρου η οποία βρίσκεται στο παρασκήνιο.
Οι μαθητές καλούνται να κατανοήσουν, μέσω ενός πεπερασμένου τύπου, μία διαδικασία η οποία συνεχίζεται εις το διηνεκές, δηλαδή μία διαδικασία η οποία εξελίσσεται επ άπειρο. Χρησιμοποιούν λοιπόν το γνωστικό σχήμα των δεκαδικών με πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία αφού η άπειρη διαδικασία που υπονοείται στην γραφή του δεκαδικού 1,23999… παριστάνεται με τελείες οι οποίες όμως και αυτές είναι πεπερασμένες!
Είναι φανερό επιπλέον ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν και το σχήμα των φυσικών αριθμών αφού συζητούν για την έννοια επόμενος η οποία δεν υφίσταται στους ρητούς αριθμούς. Το γνωστικό σχήμα των φυσικών αριθμών με την έννοια 'επόμενος' επομένως δημιουργούν επιπλέον εμπόδιο που οδηγεί στην εκδήλωση του λάθους να θεωρούν τον αριθμό 1,239999… προηγούμενο του 1,4.
Μία δραστηριότητα με την οποία ο διδάσκων θα μπορούσε να οδηγήσει τους μαθητές στην κατανόηση του λάθους είναι η διαδικασία μετατροπής του δεκαδικού σε ρητό με την συνήθη διαδικασία κατάλληλων πολλαπλασιασμών και αφαιρέσεων.
Επιπλέον θα μπορούσε να ζητήσει από τους μαθητές να υπολογίσουν το άθροισμα 0,9+0,09+0,009+0,0009………., δηλαδή το άθροισμα απείρων όρων μιας φθίνουσας γεωμετρικής προόδου. Το άθροισμα αυτό θα επέτρεπε στους μαθητές να αναγνωρίσουν την ταύτιση μιας άπειρης διαδικασίας με το αποτέλεσμά της.